

Лекция 4 «Основное уравнение гидростатики»

Цель: Приведите вывод основного уравнения гидростатики. Охарактеризуйте виды давлений в гидростатике. Опишите практические приложения основного уравнения гидростатики.

Краткий конспект лекции: Дифференциальные уравнения равновесия Эйлера выражаются системой уравнений:

$$-\frac{dp}{\partial x} = 0; \quad -\frac{dp}{\partial y} = 0; \quad -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Из уравнения (1) следует, что давление в покоящейся жидкости изменяется только по вертикали (т.е. вдоль оси z), оставаясь одинаковым во всех точках любой горизонтальной плоскости, так как изменения давления вдоль оси x и y равны нулю. Поскольку частные производные $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$ равны нулю, частная производная $\partial p/\partial z$ может быть заменена на dp/dz . Тогда

$$-\rho g - \frac{dp}{dz} = 0 \text{ или } -dp - \rho g dz = 0. \quad (2)$$

Разделив левую и правую части уравнения (2) на ρg и умножив все его члены на -1 , получим:

$$dz + \frac{dp}{\rho g} = 0. \quad (3)$$

Для несжимаемой однородной жидкости $\rho = const$. Тогда

$$dz + d[p/(\rho g)] = 0 \text{ или } d[z + p/(\rho g)] = 0.$$

Отсюда после интегрирования получим:

$$z + \frac{p}{\rho g} = const. \quad (4)$$

Для двух произвольных горизонтальных плоскостей I–I и II–II (рис. 1) уравнение (4) примет вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}. \quad (5)$$

Уравнение (4) [или (5)] называют основным уравнением гидростатики. В уравнении (5) z_1 и z_2 – это высоты расположения двух точек внутри покоящейся однородной капельной жидкости над произвольно выбранной горизонтальной плоскостью отчёта, а p_1 и p_2 – гидростатические давления в этих точках.

Величину z , характеризующую расстояние данной точки от произвольно выбранной горизонтальной плоскости отсчета (см. рис. 1), часто называют нивелирной высотой. Она выражается в единицах длины:

$$[z] = [p/\rho g] = [\rho/\gamma] = [H \cdot m^3 / (m^2 \cdot H)] = [H \cdot m/H] = [m].$$

или в системе МКГСС

$$[\rho/\gamma] = [кгс \cdot m^3 / (m^2 \cdot кгс)] = [кгс \cdot m/кгс] = [m].$$

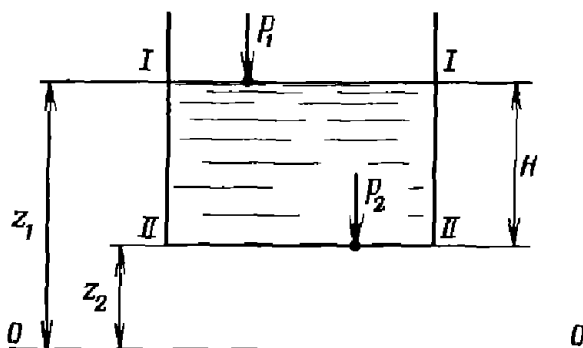


Рис. 1. К основному уравнению гидростатики

Таким образом, по физическому смыслу нивелирная высота представляет собой энергию (Н·м), приходящуюся на единицу веса (Н) жидкости. Иными словами, нивелирная высота, называемая также геометрическим напором, характеризует удельную потенциальную энергию положения данной точки над произвольно выбранной плоскостью сравнения.

Величину $p/(\rho g)$ называют напором давления или пьезометрическим (piezo (греч.) – давлю, сжимаю) напором. Как и нивелирная высота, гидростатический напор по физическому смыслу представляет собой энергию, приходящуюся на единицу веса жидкости, и характеризует удельную потенциальную энергию давления в данной точке.

Согласно основному уравнению гидростатики, сумма удельных потенциальных энергий положения и давления в покоящейся жидкости есть величина постоянная и равная полному гидростатическому напору. Следовательно, основное уравнение гидростатики является частным случаем закона сохранения энергии.

Перепишав уравнение (5) относительно p_2 , получим:

$$p_2 = p_1 + \rho g(z_1 - z_2). \quad (6)$$

Уравнение (6) является выражением закона Паскаля, из которого следует, что давление, создаваемое в любой точке покоящейся несжимаемой жидкости, передается во все стороны с одинаковой силой. Действительно, в соответствии с уравнением (6), при изменении давления p_1 в точке z_1 жидкости на какую-либо величину давление во всякой другой точке жидкости изменяется на ту же величину.

Уравнения (5) и (6) выведены для идеальной жидкости и поэтому не учитывают действия сил сжатия и растяжения, поверхностного натяжения. Однако для реальных жидкостей, которые можно считать при не слишком высоких давлениях несжимаемыми, силы растяжения и поверхностного натяжения проявляются только в случае очень малых объемов жидкости, например, в узких капиллярах. Поскольку обычно объемы используемых в технологических процессах жидкостей велики, то

уравнения (5) и (6) без заметной ошибки могут быть применимы и для реальных жидкостей.

Основное уравнение гидростатики (или закон Паскаля) применяют для расчета давления на дно и стенки сосудов, гидростатических машин (гидростатический пресс, гидростатический аккумулятор), гидрозатворов, для определения уровней жидкости в сообщающихся сосудах, измерения давления дифференциальным манометром и др.

В гидростатике различают:

а) абсолютное давление p – давление, измеренное относительно нулевой плоскости, соответствующей абсолютному вакууму (рис. 2). Абсолютное давление не может быть отрицательным.

Давление на свободной поверхности называют внешним давлением. Оно может быть равным атмосферному ($p_0 = p_{ат}$) или отличаться от него в случае закрытого сосуда;

б) барометрическое (атмосферное) давление. Нормальным барометрическим давлением считают абсолютное давление $p_{ат} = 760$ мм ртутного столба, или $p_{ат} = 101325$ Н/м². В приближенных гидравлических расчетах часто принимают $p_{ат} = 10^5$ Па.

в) избыточное (манометрическое) давление $p_{изб}$ – это превышение давления над атмосферным (см. рис. 1): $p_{изб} = p_1 - p_{ат}$;

г) вакуумметрическое давление $p_{вак}$ – это недостаток давления до атмосферного (см. рис. 2): $p_{вак} = p_{ат} - p_2$. Таким образом, вакуумметрическое давление по абсолютной величине равно отрицательному избыточному давлению.

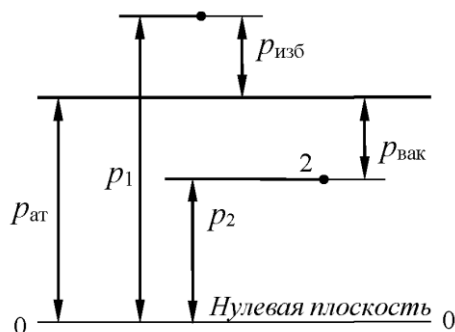


Рис. 2. Система отсчета давления

Практические приложения основного уравнения гидростатики

Основное уравнение гидростатики, выражаемое часто в виде закона Паскаля, имеет ряд важных практических приложений, некоторые из которых рассматриваются ниже.

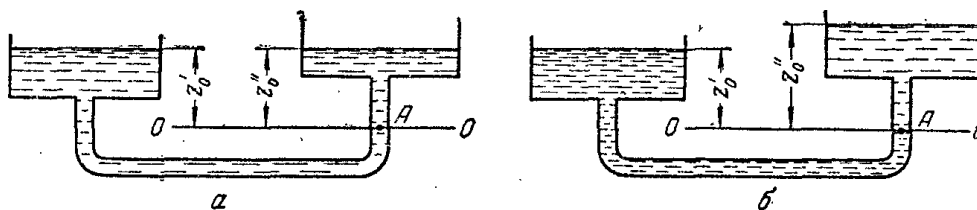


Рис. 3. Условия равновесия в сообщающихся сосудах:

а – однородная жидкость; б – разнородные (несмешивающиеся) жидкости

Принцип сообщающихся сосудов и их использование. Пусть два открытых сообщающихся сосуда (рис. 3, а) заполнены жидкостью плотностью ρ . Выберем произвольно плоскость сравнения $0-0$ и некоторую точку A внутри жидкости, лежащую в этой плоскости. Если считать точку A принадлежащей левому сосуду, то, согласно уравнению (6), давление в данной точке

$$p = p_{\text{атм}} + \rho g z_0 \quad (7)$$

Если же считать точку A принадлежащей правому сосуду, то давление в ней

$$p = p_{\text{атм}} + \rho g z_0'' \quad (8)$$

($z' = z'' = 0$, так как плоскость $0-0$ проходит через точку A).

При равновесии для каждой точки давление одинаково в любом направлении (в противном случае происходило бы перемещение жидкости). Следовательно

$$p_{\text{атм}} + \rho g z_0' = p_{\text{атм}} + \rho g z_0'' \quad (9)$$

или

$$z_0' = z_0'' \quad (10)$$

Аналогичный вывод может быть сделан для двух закрытых сообщающихся сосудов, в которых давления над свободной поверхностью жидкости одинаковы.

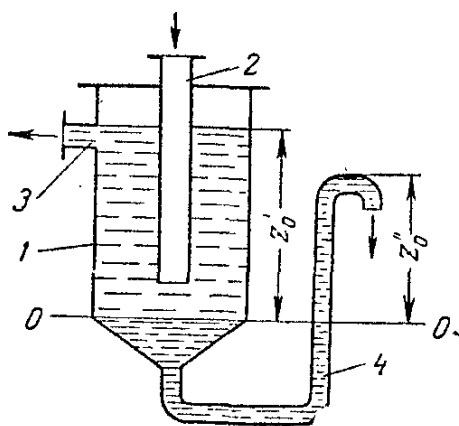


Рис. 4. К определению высоты гидравлического затвора в непрерывно действующем жидкостном сепараторе

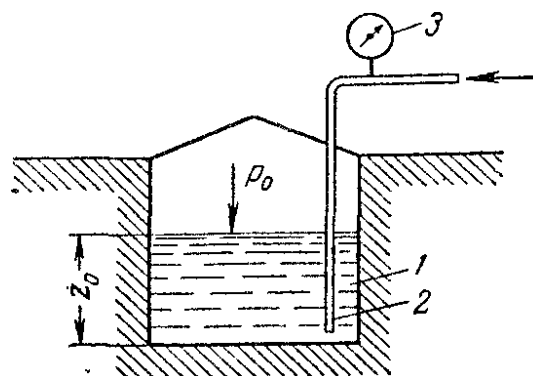


Рис. 5. Пневматический измеритель уровня жидкости

Таким образом, в открытых или закрытых находящихся под одинаковым давлением сообщающихся сосудах, заполненных однородной жидкостью, уровни ее располагаются на одной высоте независимо от формы и поперечного сечения сосудов. Этот принцип используется, в частности, для измерения уровня жидкости в закрытых аппаратах с помощью водомерных стекол.

Если сообщающиеся сосуды заполнены двумя несмешивающимися жидкостями, имеющими плотности ρ' (левый сосуд) и ρ'' (правый сосуд), то при проведении

плоскости сравнения $0-0$ через границу раздела жидкостей (рис. 3, б) аналогично предыдущему получим

$$\rho' z'_0 = \rho'' z''_0 \quad (11)$$

или

$$\frac{z'_0}{z''_0} = \frac{\rho''}{\rho'} \quad (12)$$

Отсюда следует, что в сообщающихся сосудах *высоты уровней разнородных жидкостей над поверхностью их раздела обратно пропорциональны плотностям этих жидкостей.*

Если сосуды заполнены одной жидкостью плотностью ρ , но давления над уровнем жидкости в них неодинаковы и равны p' (левый сосуд) и p'' (правый сосуд), то

$$\rho' + \rho g z'_0 = \rho'' + \rho g z''_0 \quad (13)$$

откуда разность уровней жидкости в сосудах

$$z''_0 - z'_0 = \frac{p' - p''}{\rho g} \quad (14)$$

Уравнение (14) применяют при измерениях давлений или разностей давлений между различными точками с помощью дифференциальных U-образных манометров.

Условия равновесия жидкостей в сообщающихся сосудах используют также для определения высоты гидравлического затвора в различных аппаратах. Так, в непрерывно действующих сепараторах (рис. 3) смесь жидкостей различной плотности (эмульсия) непрерывно поступает в аппарат 1 по центральной трубе 2 и расслаивается в нем, причем более легкая жидкость плотностью ρ' удаляется сверху через штуцер 3, а более тяжелая имеющая плотность ρ'' , - снизу через U-образный затвор 4. Если принять, что уровень границы раздела фаз поддерживается на границе цилиндрической и конической частей аппарата и провести через эту границу плоскость сравнения $0-0$, то необходимая высота гидравлического затвора, согласно уравнению (11), составит

$$z''_0 = z'_0 \frac{\rho'}{\rho''} \quad (15)$$

При этом допускается, что давление над жидкостью внутри аппарата и на выходе из затвора одинаково.

Пневматическое измерение количества жидкости в резервуарах. Для контроля за объемом жидкости в каком-либо резервуаре 1, например подземном (рис. 5), в него помещают трубу 2, нижний конец которой доходит почти до дна резервуара. Давление над жидкостью в резервуаре равно p_0 . По трубе 2 подают сжатый воздух или другой газ, постепенно повышая его давление, замеряемое манометром 3. Когда воздух преодолит сопротивление столба жидкости в резервуаре и начнет барботировать сквозь жидкость, давление p , фиксируемое манометром, перестанет возрастать и будет равно, согласно уравнению (16)

$$p = p_0 + \rho g z_0 \quad (16)$$

откуда уровень жидкости в резервуаре

$$z_0 = \frac{p - p_0}{\rho g} \quad (17)$$

По величине z_0 и известной площади поперечного сечения резервуара определяют объем находящейся в нем жидкости.

Гидростатические машины. На использовании основного уравнения гидростатики основана работа гидростатических машин, например гидравлических прессов (рис. 6), применяемых в химической промышленности для прессования и брикетирования различных материалов. Если приложить относительно небольшое усилие к поршню 1, движущемуся в цилиндре меньшего диаметра d_1 и создать давление p на поршень, то, согласно закону Паскаля, такое же давление p будет приходиться на поршень 2 в цилиндре большего диаметра d_2 . При этом сила давления на поршень 1 составит

$$P_1 = p \frac{\pi d_1^2}{4} \quad (18)$$

а сила давления на поршень 2

$$P_2 = p \frac{\pi d_2^2}{4} \quad (19)$$

В результате поршень в цилиндре большего диаметра передаст силу давления, во столько раз большую, чем сила, приложенная к поршню в цилиндре меньшего диаметра, во сколько поперечное сечение цилиндра 2 больше, чем цилиндра 1. Таким способом с помощью сравнительно небольших усилий осуществляют прессование материала 3, помещенного между поршнем 2 и неподвижной плитой 4.

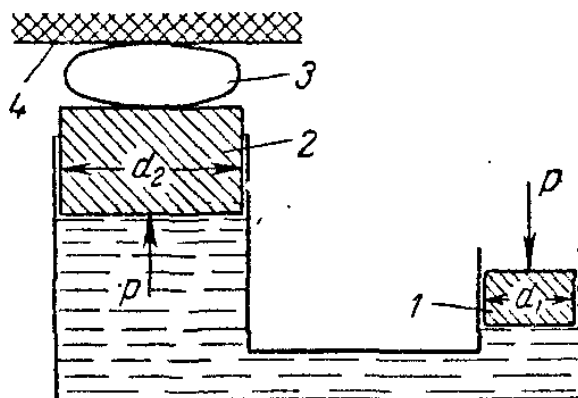


Рис. 6. Схема гидравлического пресса

Давление покоящейся жидкости на дно и стенки сосуда. Если жидкость помещена в сосуд любой формы, то гидростатическое давление во всех точках горизонтального дна сосуда одинаково, давление же на его боковые стенки возрастает с увеличением глубины погружения.

Гидростатическое давление p на уровне дна сосуда (см. рис. 1), как и для любой точки внутри жидкости, определяется уравнением (16), но для всех точек дна величина $(z_0 - z)$ представляет собой высоту жидкости в сосуде. Обозначив последнюю через H , получим

$$p = p_0 + \rho gH \quad (20)$$

Таким образом, сила давления P на горизонтальное дно сосуда *не зависит от формы сосуда и объема жидкости в нем*. При данной плотности жидкости эта сила *определяется лишь высотой столба жидкости H и площадью F дна сосуда*:

$$P = pF \text{ или } P = (p_0 + \rho gH)F. \quad (21)$$

Гидростатическое давление жидкости на вертикальную стенку сосуда изменяется по высоте. Соответственно сила давления на стенку также различна по высоте сосуда. Поэтому

$$P = (p_0 + \rho gh)F_{\text{ст}}, \quad (22)$$

где h – расстояние от верхнего уровня жидкости до центра тяжести смоченной площади $F_{\text{ст}}$ стенки.

Из выражения (22) следует, что сила давления на вертикальную стенку равна произведению ее смоченной площади на гидростатическое давление в центре тяжести смоченной площади стенки. Точка приложения сил давления на стенку называется центром давления. Эта точка расположена всегда ниже центра тяжести смоченной площади стенки. Например, для вертикальной плоской стенки центр давления расположен от верхнего уровня жидкости на расстояние $2/3 H$ [1-4].

Вопросы для самоконтроля:

1. Приведите вывод основного уравнения гидростатики.
2. Дайте характеристику видам давлений в гидростатике.
3. Опишите практические приложения основного уравнения гидростатики.

Литература

1. Лекции по курсу «Основные процессы и аппараты химической технологии»: учебно-методическое пособие / составители: Ж.Т. Ешова, Д.Н. Акбаева. – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 392 с. – 40 экз.
2. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 1973. – 752 с.
3. Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М. Методы расчёта процессов и аппаратов химической технологии (примеры и задачи). – Санкт-Петербург: ХИМИЗДАТ, 2009. – 544 с.
4. Вайсман Н.М. Механика жидкости и газа. Гидравлика: учеб. пособие / Н.М. Вайсман, В.А. Голиков, А.А. Жарковский. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 222 с.